Laboratorio di Algoritmi e Strutture Dati

Docenti: M. Goldwurm, S. Aguzzoli

Appello del 1° Aprile 2003

Progetto "Trasporti Pubblici"
Consegna entro il 28 Aprile 2003

Il problema

Obiettivo del progetto è lo studio dei tempi di viaggio necessari a spostarsi tra due punti arbitrari in una rete di trasporti pubblici urbani.

La rete è costituita da diverse linee, per ciascuna delle quali è definito il tempo di percorrenza di un segmento di lunghezza unitaria.

Ovviamente le linee di trasporto non coprono tutta l'area urbana, per cui in genere per spostarsi dal punto di partenza al punto di arrivo può essere necessario percorrere dei tratti a piedi (con un tempo di percorrenza unitario fissato e presumibilmente molto elevato).

Per semplicità considereremo solo spostamenti in cui al più due segmenti di un viaggio (di lunghezza arbitraria), quello iniziale e quello finale, si possano percorrere a piedi. Potremmo esemplificare questa situazione dicendo che consideriamo solo viaggi che richiedano al più un biglietto per l'accesso alla rete di trasporti: una volta lasciata la rete non è più possibile accedere alla rete con lo stesso biglietto.

In alcuni casi, il viaggio che richiede il tempo minore consiste nel percorrere a piedi l'intera distanza che separa il punto di partenza dal punto di arrivo.

Il nostro viaggiatore quindi si atterrà sempre alla seguente procedura per decidere come organizzare il suo viaggio:

- Preliminarmente il viaggiatore valuta quanto tempo occorre per percorrere l'intera distanza del viaggio a piedi.
- Valuta poi i tempi richiesti da tutti i possibili viaggi organizzati nelle tre fasi seguenti:
  1. Raggiungimento a piedi di un punto della rete a distanza minima dal punto di partenza (può esserci più di un punto a distanza minima).
  2. Uso delle linee della rete urbana.
  3. Raggiungimento a piedi del punto di arrivo lasciando la rete in un punto a distanza minima dal punto di arrivo stesso (può esserci più di un punto a distanza minima).
- Sceglie un viaggio di tempo minimo fra quelli considerati ai punti precedenti.

Per valutare il tempo speso durante un viaggio occorre sommare i tempi di percorrenza di tutti i singoli segmenti di lunghezza unitaria che costituiscono il viaggio stesso. Per semplicità, assumiamo che cambi di linea e attesa di coincidenze richiedano sempre tempo nullo.

Chiamiamo *tratto* un segmento di lunghezza unitaria disposto orizzontalmente o verticalmente nel piano. Formalmente, un tratto è un insieme di punti della forma

$$\{(k, y) : x \leq k \leq x + 1, \quad x, y \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{R}\}$$

o della forma

$$\{(x,k) : y \leq k \leq y+1, \quad x,y \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{R}\}$$

Un tratto è denotato mettendo fra parentesi quadre i punti estremi del segmento in un ordine qualsiasi. Ad esempio, $[(2,5),(3,5)]$ denota il tratto $\{(k,5) : 2 \leq k \leq 3\}$ (segmento di estremi $(2,5)$ e $(3,5)$); questo stesso tratto può essere denotato con $[(3,5),(2,5)]$.

Una *linea di trasporto* l è specificata da una quadrupla $l = (x, y, t, \alpha)$, dove:

- $x, y \in \mathbb{Z}$ sono le coordinate del punto di origine della linea l;
- $0 < t \in \mathbb{N}$ è il tempo necessario per percorrere un tratto della linea l;
- α, che specifica la successione dei tratti che formano la linea l, è una sequenza finita di coppie della forma (k, D) dove $0 < k \in \mathbb{N}$ e $D \in \{N, E, S, W\}$, da interpretarsi come segue:
  - Il punto (x_0, y_0) *origine* della linea l è (x, y).
  - Ogni coppia (k, D) di α corrisponde all'aggiunta alla linea l di k tratti nella direzione specificata dal simbolo; in particolare, supponiamo di aver già considerato le prime i coppie $(k_1, D_1), (k_2, D_2), \ldots, (k_i, D_i)$ di α, e di avere quindi già descritto la linea l' costituita dai primi $k_1 + k_2 + \cdots + k_i$ tratti della linea l, sia (a, b) il punto terminale della linea l' finora costruita, e sia (k, D) la $(i+1)$-esima coppia di α. Allora i successivi k tratti di l saranno così costruiti, in funzione del valore di D:

    $D = N$ (Spostamento verso Nord). I k tratti da aggiungere sono

    $$[(a,b),(a,b+1)], [(a,b+1),(a,b+2)], \ldots, [(a,b+k-1),(a,b+k)].$$

    $D = E$ (Spostamento verso Est). I k tratti da aggiungere sono

    $$[(a,b),(a+1,b)], [(a+1,b),(a+2,b)], \ldots, [(a+k-1,b),(a+k,b)].$$

    $D = S$ (Spostamento verso Sud). I k tratti da aggiungere sono

    $$[(a,b),(a,b-1)], [(a,b-1),(a,b-2)], \ldots, [(a,b-k+1),(a,b-k)].$$

    $D = W$ (Spostamento verso Ovest). I k tratti da aggiungere sono

    $$[(a,b),(a-1,b)], [(a-1,b),(a-2,b)], \ldots, [(a-k+1,b),(a-k,b)].$$

Un viaggio avviene tra due punti interi del piano (a, b) e (c, d) (con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$). Non necessariamente tali punti appartengono a qualche linea di trasporto.

Formalmente un *viaggio* è una sequenza finita V di tratti del piano

$$[(x_0,y_0),(x_1,y_1)], [(x_1,y_1),(x_2,y_2)], \ldots, [(x_{k-1},y_{k-1}),(x_k,y_k)]$$

dove:

- $(x_0, y_0) = (a, b)$ e $(x_k, y_k) = (c, d)$.
- Per ogni $1 \leq i < k$, l'i-esimo e l'$(i+1)$-esimo tratto di V possono essere rispettivamente scritti come $[(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i)]$ e $[(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})]$.

In accordo con le nostre ipotesi iniziali sulle possibili organizzazioni di un viaggio possiamo sempre considerare ogni viaggio V come costituito da tre sottosequenze successive V_0, V_1, V_2, ognuna delle quali può essere eventualmente di lunghezza nulla, come segue:

- V_0 è costituito solo da tratti non appartenenti ad alcuna linea di trasporto e rappresenta la prima fase di un viaggio, consistente nel raggiungere a piedi la linea di trasporto più vicina.
- V_1 rappresenta la seconda fase del viaggio ed è costituito solo da tratti appartenenti a linee di trasporto (non necessariamente tutti i tratti devono appartenere alla stessa linea).
- V_2 è costituito solo da tratti non appartenenti ad alcuna linea di trasporto e rappresenta la terza fase di un viaggio, consistente nel raggiungere a piedi il punto di arrivo da un punto della rete a distanza minima da esso.

Nel caso in cui il viaggio V avvenga completamente a piedi si può assumere che $V_0 = V$ e $V_1 = V_2 = \epsilon$ dove ϵ denota la sequenza lunga 0.

Siamo interessati a calcolare il tempo di percorrenza minimo fra tutti i viaggi da (a, b) a (c, d) (si osservi che andare da (a, b) ad (c, d) lungo un certo viaggio V richiede lo stesso tempo di percorrenza del viaggio V' ottenuto percorrendo i tratti del viaggio in ordine inverso).

Dunque chiamiamo *minimo tempo di viaggio* da (a, b) a (c, d) la quantità intera

$$T((a,b),(c,d)) = \min\{T(V) \mid V \text{ è un viaggio da } (a,b) \text{ a } (c,d)\}$$

dove il tempo $T(V)$ del viaggio V è calcolato come segue:

Siano V_0, V_1, V_2 le tre fasi del viaggio V, costruite come descritto precedentemente, e siano t_0 il tempo di percorrenza di un tratto a piedi e $t_1, t_2, \ldots, t_u$ i tempi di percorrenza dei tratti associati alle linee di trasporto presenti (t_i denoti il tempo di percorrenza di un tratto sulla linea l_i).

Sia k_0 il numero di tratti percorsi a piedi, vale a dire il numero totale di tratti in $V_0 \cup V_2$, e per ogni $1 \leq i \leq u$ sia k_i il numero dei tratti di V_1 con tempo di percorrenza t_i.

Allora

$$T(V) = t_0 k_0 + t_1 k_1 + \cdots + t_u k_u.$$

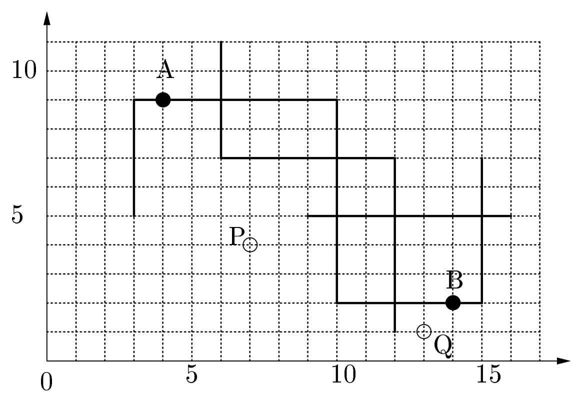
Si osservi che se un tratto U giace su più di una linea, è ovviamente preferibile scegliere, per ogni viaggio che comprenda U, di percorrere U sulla linea caratterizzata dal minimo tempo di percorrenza del tratto.

Esempio

Supponiamo di aver costruito tre linee descritte da

$$(3,\ 5,\ 20,\ (4,N)(7,E)(7,S)(5,E)(5,N)) \qquad (12,\ 1,\ 20,\ (6,N)(6,W)(4,N)) \qquad (9,\ 5,\ 1,\ (7,E))$$

rappresentate nella figura qui sotto



Consideriamo i punti $A = (4, 9)$ e $B = (14, 2)$. Il minimo tempo di percorrenza fra A e B si ottiene utilizzando la prima linea da A al punto (10,5), quindi percorrendo la terza linea da (10,5) a (15,5), quindi ancora la prima linea da (15,5) a B; il tempo totale di percorrenza è 285 (14 tratti sulla prima linea, 5 sulla terza linea). Si ottiene lo stesso tempo di percorrenza andando da (6,9) a (10,7) con la seconda linea.

Supponiamo ora che la prima linea abbia tempo di percorrenza unitario 10, la seconda 5 e la terza 30. In questa ipotesi, per minimizzare il tempo di percorrenza fra A e B occorre andare da A a (6,9) con la prima linea, da (6,9) a (12,2) con la seconda e da (12,2) a B ancora con la prima; il tempo di percorrenza è 105 (4 sulla prima linea, 13 sulla seconda).

Supponiamo ora di volersi spostare dal punto $P = (7, 4)$ al punto $Q = (13, 1)$ (con i tempi di percorrenza dati inizialmente) e che il tempo di percorrenza di un tratto a piedi sia 500. Per trovare la minima distanza tra P e Q occorre considerare due possibilità. La prima consiste nell'andare a da P a Q a piedi; occorre percorrere 9 tratti unitari e il tempo richiesto è 4500. Alternativamente, valutiamo il tempo migliore utilizzando i mezzi; occorre accedere alla rete da un punto P' avente distanza minima da P e utilizzare la rete fino a un punto Q' avente distanza minima da Q, scegliendo P' e Q' in modo ottimale. Nell'esempio, i possibili punti di accesso sono $P_1 = (7, 7)$, $P_2 = (9, 5)$ e $P_3 = (10, 4)$, che distano da P tre tratti; i possibili punti di uscita $Q_1 = (12, 1)$ e $Q_2 = (13, 2)$ a distanza 1 da Q. Per costruire il percorso minimo occorre scegliere P_i e Q_j ($1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$) in modo da minimizzare il tempo di utilizzo della rete. La soluzione ottimale è quella di entrare nella rete in P_2, usare la terza linea fino a (12,5), andare infine con la seconda linea in Q_1. In questo modo il tempo di percorrenza da P_2 a Q_1 è 83, quindi la minima distanza da Pe Q usando i trasporti è 2083. Si può concludere che il minimo tempo per andare da P a Q è 2083.

Si richiede di implementare una struttura dati efficiente che permetta di eseguire le operazioni descritte sotto.

Si tenga presente che la dimensione della più piccola area rettangolare contenente tutte le linee di trasporto contiene in genere un numero di punti interi di gran lunga superiore rispetto al numero di punti appartenenti alle linee. Pertanto, *non* è sicuramente efficiente rappresentare il piano mediante una matrice o strutture analoghe che memorizzino *ogni* punto del piano. Si devono inoltre evitare procedure che effettuano ricerche su *tutto* il piano. Inoltre si noti che in genere la sequenza α nella specifica $l = (x, y, t, \alpha)$ di una linea di trasporto è corta rispetto al numero totale di tratti che compongono la linea stessa.

- **crea**(a, b, t, α)

  Costruisce la linea di trasporto $l = (a, b, t, \alpha)$.

- **tempo**(a, b, c, d)

  Calcola il minimo tempo di percorrenza $T((a, b), (c, d))$ fra (a, b) e (c, d) e lo stampa.

- **modifica**(a, b, t)

  Stabilisce che il tempo di percorrenza di un tratto su ogni linea a cui appartiene (a, b) è t. Se (a, b) non appartiene ad alcuna linea di trasporto allora stabilisce che t è il tempo di percorrenza di un tratto a piedi.

Nota: se il tempo di percorrenza di un tratto a piedi non è ancora mai stato stabilito esplicitamente, si assuma per default il valore 100.

Specifiche di implementazione

Il programma deve leggere dallo standard input (`stdin`) una sequenza di linee (separate da `\n`), ciascuna delle quali corrisponde a una linea della prima colonna della Tabella 1, dove a, b, c, d sono interi, t è un intero positivo, e α è una sequenza finita di elementi della forma kD dove k è un intero positivo e $D \in \{N, E, S, W\}$. Quando una linea è letta viene eseguita l'operazione ad essa associata e viene stampato l'eventuale output prodotto dall'esecuzione dell'operazione associata; tutte le operazioni di stampa sono effettuate sullo standard output (`stdout`) e ogni operazione deve iniziare su una nuova linea.

Linea di input	Operazione
`c` $a\ b\ t\ \alpha$	**crea** (a, b, t, α)
`t` $a\ b\ c\ d$	**tempo** (a, b, c, d)
`m` $a\ b\ t$	**modifica** (a, b, t)
`f`	Termina l'esecuzione del programma

Tabella 1: Specifiche del programma

Se l'utente immette una linea di input non conforme alle specifiche della tabella, tale linea è da ignorare: il programma deve immediatamente cominciare a processare la linea di input seguente.

Si noti che non devono essere presenti vincoli sulle dimensioni delle linee di trasporto. Non si richiede – anzi si sconsiglia – l'uso di grafica, se non per test personali: in modo particolare, non si usi `conio.h` e neppure `clrscr()`.

Esempio

Si supponga che le linee di input siano:

```
t 6 4 -7 -3
c -4 -2 20 5N3E5S4E8N
t 6 4 -7 -3
c -6 1 10 11E5S8W
t 6 4 -7 -3
c 6 1 10 1W
t 6 4 -7 -3
m 3 1 5
t 6 4 -7 -3
m 1 1 10
c 3 1 3 3S4W3N
t -4 -2 -1 0
t 6 4 -7 -3
f
```

L'output prodotto dal programma deve essere:

```
2000
1160
890
860
765
48
790
```

Presentazione del progetto

Il progetto deve essere inviato per posta elettronica all'indirizzo `aguzzoli@dsi.unimi.it` entro il 28 Aprile 2003. La discussione del progetto si svolgerà il 5 Maggio 2003 in aula 6 alle 9:00. L'esame orale si svolgerà il 5 Maggio 2003 in aula 6 nel pomeriggio.

Occorre presentare:

1. il codice sorgente (rigorosamente ANSI C, compilabile con **gcc**);
2. una sintetica relazione (formato pdf o rtf) che illustra le strutture dati utilizzate e analizza il costo delle diverse operazioni richieste dalla specifica.

I due o più file (file sorgenti C + relazione) devono essere contenuti in un unico file `.zip` il cui nome dovrà essere `cognome.zip`. La relazione e il codice devono riportare il vostro nome, cognome e matricola.

Una copia cartacea della relazione e del codice deve inoltre essere consegnata al dr. Aguzzoli sempre entro il 28 Aprile 2003 (lasciandola eventualmente nella sua casella postale presso il dipartimento in via Comelico).

Si ricorda infine di presentarsi alla prova orale con una copia stampata della relazione e del codice.

Per ogni ulteriore chiarimento:
E-mail: `aguzzoli@dsi.unimi.it`
Ricevimento: il mercoledì, ore 15-16, stanza S211.

Avvisi

La versione aggiornata del progetto è pubblicata in .pdf sul sito:
`http://homes.dsi.unimi.it/~aguzzoli/algo.htm`.
Si consiglia di consultare periodicamente questo sito per eventuali correzioni e/o precisazioni relative al testo del progetto.

Lo svolgimento del progetto è una prova d'esame da svolgere *individualmente*.

NOTA: A causa delle vacanze pasquali e per la partecipazione ad un convegno nella settimana dal 14 al 16 Aprile prossimi, non si terrà ricevimento nei giorni mercoledì 16 e mercoledì 23 Aprile. Sarà comunque possibile chiedere chiarimenti via e-mail.