

# Laboratorio di Algoritmi e Strutture Dati

Docente: S. Aguzzoli

Progetto “Stonehenge 2”

valido per l'appello di settembre 2013

## 1 Il problema

Una civiltà neolitica erige complessi megalitici allo scopo di immaginare cosa ne fantasticheranno i posteri. A questo fine la popolazione di tale civiltà utilizza delle cave di roccia presenti nel territorio, vie di comunicazione come strade e canali per il trasporto di blocchi di roccia, siti cerimoniali dove erigere e posizionare i blocchi stessi.

### 1.1 Trasportare i blocchi

Il trasporto dei blocchi dalle cave avviene caricandoli su zattere che navigano in canali artificiali. Tali canali sono composti da tratte rettilinee e servono un insieme di cave. Per semplicità supponiamo che una *tratta* di canale sia allineata in direzione est-ovest. Ogni *cava* dell'insieme servito dalla tratta è collegata al canale attraverso una *strada di servizio* perpendicolare alla tratta. Siamo interessati alle distanze da coprire lungo queste strade.

Possiamo rappresentare il territorio con un sistema di assi cartesiane dove l'asse delle ascisse è allineato da ovest a est, mentre quello delle ordinate da sud a nord.

A ogni insieme di cave  $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  servito da una determinata tratta è associata una funzione *posizione*  $p: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , dove  $p(c_i) = (x_i, y_i)$  rappresenta la posizione della cava  $c_i$  nel territorio.

Per semplicità, assumiamo sempre che se  $i \neq j$  allora  $x_i \neq x_j$ .

La tratta del canale giace su una retta parallela all'asse delle ascisse, di ordinata  $y \in \mathbb{Z}$ . La *percorrenza totale*  $\mathcal{P}$  della tratta è la somma delle lunghezze delle strade di servizio, ovvero:

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^n |y_i - y|.$$

Dato un insieme di cave  $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  la popolazione determina la posizione  $y$  della tratta in modo tale da minimizzare  $\mathcal{P}$ .

**Esempio 1.** Sia  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_8\}$  l'insieme delle cave nel territorio, dove

$$p(c_1) = (4, 7), \quad p(c_2) = (18, 6), \quad p(c_3) = (10, 4), \quad p(c_4) = (-4, 3),$$

$$p(c_5) = (-2, 6), \quad p(c_6) = (-7, 8), \quad p(c_7) = (6, 1), \quad p(c_8) = (9, -3).$$

Allora, una possibile scelta di ordinata  $y$  tale che la percorrenza totale della tratta è minima è  $y = 4$ , con  $\mathcal{P} = 22$ . Un'altra possibile scelta minima è  $y = 5$ , con, ovviamente,  $\mathcal{P} = 22$  anche in questo caso. Una scelta di  $y$  che non corrisponde alla percorrenza minima è  $y = 3$ , con  $\mathcal{P} = 24$ .

### 1.2 Individuare i siti

Per ogni insieme  $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  di cave servito da una determinata tratta la civiltà erige due *siti cerimoniali*, ovvero complessi megalitici costruiti con i blocchi trasportati lungo la tratta di canale. I

due siti sono posti in corrispondenza di due cave in  $\mathcal{C}$  (eventualmente coincidenti). In particolare le posizioni  $(x_a, y_a)$  e  $(x_b, y_b)$  dei due siti devono essere tali da minimizzare la somma totale delle lunghezze delle porzioni di canale necessarie a portare i blocchi di ogni cava di  $\mathcal{C}$  in almeno uno dei due siti. Equivalentemente, la somma

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \min\{|x_i - x_a|, |x_i - x_b|\}$$

deve essere minima rispetto a ogni scelta di  $(x_a, y_a), (x_b, y_b) \in \{p(c_i) \mid c_i \in \mathcal{C}\}$ .

**Esempio 2.** Sia  $\mathcal{C}$  come nell'Esempio 1. Allora, le posizioni idonee per i due siti cerimoniali sono:  $(x_a, y_a) = (-4, 3)$  e  $(x_b, y_b) = (9, -3)$  per le quali risulta  $\mathcal{L} = 23$ . Una scelta che non minimizza  $\mathcal{L}$  è ad esempio  $(x_a, y_a) = (4, 7)$  e  $(x_b, y_b) = (18, 6)$ , per la quale  $\mathcal{L} = 38$ .

### 1.3 Posizionare i blocchi

Ogni blocco consegnato a un sito cerimoniale deve essere posizionato nel complesso megalitico. Il blocco viene portato nella sua posizione finale attraverso una serie di mosse, chiamate *rotazioni*.

Un blocco  $B(x, y, z)$  è un parallelepipedo i cui lati, paralleli alle direzioni degli assi del *sistema di riferimento del sito*<sup>1</sup>, sono lunghi rispettivamente  $x, y, z \in \mathbb{Z}$ . La collocazione attuale di un blocco è determinata dalle coordinate del suo vertice di sud-ovest appoggiato sul terreno. Ovvero, se  $(x_0, y_0, 0)$  sono le coordinate di tale vertice, allora la *collocazione* di  $B(x, y, z)$  è:

$$S(x, y, z, x_0, y_0) = \{(r, s, t) \in \mathbb{Z}^3 \mid x_0 \leq r \leq x_0 + x, y_0 \leq s \leq y_0 + y, 0 \leq t \leq z\}.$$

Il blocco può essere ruotato in ognuna delle quattro direzioni cardinali e dunque portato in una nuova collocazione. Tali rotazioni sono descritte come segue:

- La rotazione *verso nord* di  $B(x, y, z)$  in posizione  $(x_0, y_0, 0)$  avviene attorno all'asse su cui giace il segmento di estremi  $(x_0, y_0 + y, 0)$  e  $(x_0 + x, y_0 + y, 0)$ .
- La rotazione *verso sud* di  $B(x, y, z)$  in posizione  $(x_0, y_0, 0)$  avviene attorno all'asse su cui giace il segmento di estremi  $(x_0, y_0, 0)$  e  $(x_0 + x, y_0, 0)$ .
- La rotazione *verso ovest* di  $B(x, y, z)$  in posizione  $(x_0, y_0, 0)$  avviene attorno all'asse su cui giace il segmento di estremi  $(x_0, y_0, 0)$  e  $(x_0, y_0 + y, 0)$ .
- La rotazione *verso est* di  $B(x, y, z)$  in posizione  $(x_0, y_0, 0)$  avviene attorno all'asse su cui giace il segmento di estremi  $(x_0 + x, y_0, 0)$  e  $(x_0 + x, y_0 + y, 0)$ .

**Esempio 3.** Si consideri il blocco  $B(3, 4, 5)$  in posizione  $(6, 7, 0)$ . Allora la collocazione del blocco è  $S(3, 4, 5, 6, 7) = \{(r, s, t) \mid 6 \leq r \leq 9, 7 \leq s \leq 11, 0 \leq t \leq 5\}$ . La rotazione *verso nord* porta il blocco originale nel blocco  $B(3, 5, 4)$  in posizione  $(6, 11, 0)$ . La rotazione *verso sud* porta il blocco in  $B(3, 5, 4)$  in posizione  $(6, 2, 0)$ . La rotazione *verso ovest* porta il blocco in  $B(5, 4, 3)$  in posizione  $(1, 7, 0)$ . La rotazione *verso est* porta il blocco in  $B(5, 4, 3)$  in posizione  $(9, 7, 0)$ .

Un blocco  $B(x, y, z)$  in posizione  $(x_0, y_0, 0)$  può essere *liberamente ruotato* in una data direzione se la nuova collocazione del blocco non viene a sovrapporsi alle collocazioni dei blocchi già presenti. In dettaglio, se le collocazioni degli altri blocchi già presenti sono  $S_1, S_2, \dots, S_k$ , e se la nuova collocazione del blocco a seguito della rotazione è  $S$ , allora deve valere  $S \cap S_i = \emptyset$  per ogni  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

**Esempio 4.** Supponiamo che nel sito siano già presenti i seguenti blocchi:  $B(2, 6, 2)$  in posizione  $(11, 1, 0)$ ,  $B(4, 4, 7)$  in posizione  $(4, -2, 0)$ ,  $B(11, 3, 4)$  in posizione  $(-2, 9, 0)$ , e infine  $B(1, 1, 5)$  in posizione  $(6, 5, 0)$ . Allora quest'ultimo blocco può essere liberamente ruotato solo verso ovest. In tutte le altre tre direzioni andrebbe a sovrapporsi alla collocazione di qualcuno degli altri blocchi.

<sup>1</sup>Ovviamente, questo sistema di riferimento non ha nulla a che fare col sistema di riferimento che rappresenta le posizioni delle cave e dei siti, le tratte di canale e le strade nel territorio.

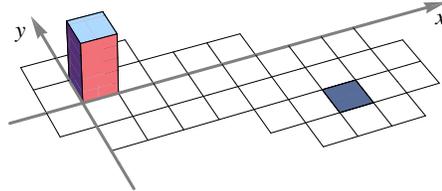


Figura 1: Un percorso cerimoniale per una stele.

## 1.4 La stele

Per completare un sito cerimoniale viene collocato nella sua sede finale un ultimo blocco, chiamato *stela*. La stele è un blocco  $B(1, 1, 2)$ . Tale blocco deve essere spostato da una *posizione iniziale*  $(x_0, y_0, 0)$  a una *posizione finale*  $(x_1, y_1, 0)$  attraverso una sequenza finita di mosse tali che:

1. Ogni mossa consiste in una rotazione del blocco.
2. La base<sup>2</sup> del blocco nella posizione iniziale e dopo ogni mossa deve essere totalmente contenuta in una specificata regione  $K \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  di piano detta *percorso cerimoniale*.
3. La stele non può mai toccare, in alcuna mossa, eventuali blocchi collocati nel percorso cerimoniale. Tali blocchi vengono chiamati *ostacoli*.
4. Quando si trova in posizione finale, la stele deve avere collocazione  $S(1, 1, 2, x_1, y_1)$ .

Tale sequenza finita di mosse si chiama *cammino* della stele. Il numero di mosse che costituiscono un cammino è detto *lunghezza* del cammino.

**Esempio 5.** *Supponiamo che il percorso cerimoniale sia come indicato in Figura 1, la stele sia nella posizione iniziale  $(0, 0, 0)$ , mentre la posizione finale sia, come risulta dalla figura, in posizione  $(6, -3, 0)$ . Allora un cammino di lunghezza 8 è costituito dalla sequenza:*

$$S, E, E, E, E, E, E, S,$$

dove  $S$  indica una rotazione verso sud, mentre  $E$  indica una rotazione verso est. Un cammino di lunghezza 7 è invece fornito dalla sequenza:

$$E, E, S, E, E, E, S.$$

Non esistono cammini di lunghezza inferiore a 7. Supponiamo ora che il sito cerimoniale contenga un blocco  $B(2, 7, 1)$  in posizione  $(3, -3, 0)$ . Allora non esiste alcun cammino per la stele.

## 2 Specifiche di progettazione

Si deve progettare un programma che sia in grado di gestire i dati relativi a blocchi, cave, tratte, siti, e quant'altro e di eseguire le seguenti operazioni. Il progetto del programma va illustrato in una relazione scritta.

<sup>2</sup>La base di un blocco in una certa collocazione, è l'insieme dei punti nell'intersezione fra la collocazione stessa e il piano di equazione  $z = 0$ .

La progettazione deve prevedere la scelta delle strutture dati da usare per rappresentare i dati e gli algoritmi da applicare per risolvere in maniera efficiente i problemi descritti nella traccia (non si devono assumere limiti su numeri di blocchi, cave, e loro coordinate). Non basta limitarsi a riferimenti generici alle tecniche algoritmiche utilizzate (es: “l’operazione X si risolve con un algoritmo greedy”) ma è necessario dettagliare le procedure da utilizzare, tramite pseudocodice o direttamente il linguaggio C. In caso si scelga di consegnare porzioni di codice C, renderle eseguibili e testabili da sole, scrivendo per ognuna di queste porzioni una adeguata funzione `main`.

In particolare si richiede di analizzare, in funzione delle scelte di progettazione fatte, quale risulta essere il costo delle diverse operazioni richieste dalla specifica.

Si richiede inoltre di fornire una rassegna *esauriente* di esempi che potrebbero essere usati per testare il programma e che mettono in evidenza particolari caratteristiche del suo funzionamento (non solo casi tipici di input, ma anche casi limite e/o situazioni patologiche; input che evidenzino la differenza di prestazioni tra le soluzioni progettuali scelte e altre più semplicistiche).

Non si richiede un’implementazione completa del progetto; è sufficiente fornire l’ossatura del programma (eventualmente suddiviso su più file) contenente in particolare: le definizioni dei tipi fondamentali, i prototipi delle funzioni che realizzano le operazioni specificate nella traccia, e tutte le porzioni di codice utili ad illustrarne il loro uso.

Facoltativamente, è possibile consegnare un’implementazione completa e funzionante del progetto.

## 2.1 Operazioni da eseguire

Si noti che le operazioni richieste sono liberamente implementabili; in particolare, non vanno necessariamente intese come prototipi di funzioni.

- **territorio**(*nomefile*)

Legge dal file *nomefile* la specifica delle posizioni delle cave presenti in un territorio. Calcola la percorrenza totale minima e un possibile valore dell’ordinata  $y$  della tratta del canale che realizza tale percorrenza minima. Se il file *nomefile* non esiste, stampa un messaggio opportuno. È compito dello studente specificare completamente il formato del file.

- **nuova\_cava**( $x, y$ )

Apri una nuova cava  $c$  nel territorio in posizione  $p(c) = (x, y)$ . Se esiste già una cava  $c'$  tale che  $p(c') = (x, y')$ , distrugge  $c'$  e la sostituisce con  $c$ .

- **cava\_esaurita**( $x, y$ )

Elimina dal territorio la cava di posizione  $(x, y)$ , se tale cava esiste.

- **percorrenza\_minima**()

Calcola la percorrenza totale minima rispetto alle cave attualmente attive nel territorio e un possibile valore dell’ordinata  $y$  della tratta del canale che realizza tale percorrenza minima.

- **siti\_cerimoniali**()

Calcola la posizione dei siti cerimoniali rispetto alle cave attualmente attive nel territorio.

- **sito**(*sito, nomefile*)

Rimuove tutti i blocchi attualmente presenti nel sito *sito* e li rimpiazza con quelli specificati nel sito *nomefile*. Tale file deve specificare la collocazione di ogni blocco. Se il sito non è uno dei due presenti nel territorio, annulla questa operazione. Se il file *nomefile* non esiste, stampa un messaggio opportuno. È compito dello studente specificare completamente il formato del file.

- **blocco**(*sito, x, y, z, x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>*)  
 Inserisce nel sito *sito* un blocco  $B(x, y, z)$  in posizione  $(x_0, y_0, 0)$ . Se la collocazione di tale blocco viene a sovrapporsi a blocchi già presenti nel sito, o se il sito non è uno dei due presenti nel territorio, annulla questa operazione.
- **forza\_blocco**(*sito, x, y, z, x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>*)  
 Inserisce nel sito *sito* un blocco  $B(x, y, z)$  in posizione  $(x_0, y_0, 0)$ , rimuovendo nel contempo tutti i blocchi già presenti che vengono a sovrapporsi alla collocazione del nuovo blocco. Se il sito non è uno dei due presenti nel territorio, annulla questa operazione.
- **ruota\_blocco**(*sito, x, y, z, direzione*)  
 Nel sito *sito*, ruota il blocco che contiene il punto  $(x, y, z)$  verso *direzione*, dove *direzione*  $\in \{\text{nord, est, sud, ovest}\}$ . Se tale punto non appartiene ad alcun blocco del sito, o se il blocco a cui appartiene non può essere liberamente ruotato nella direzione specificata, annulla questa operazione. Se il sito non è uno dei due presenti nel territorio, annulla questa operazione.
- **rimuovi\_blocco**(*sito, x, y, z*)  
 Elimina dal sito *sito* il blocco che contiene il punto  $(x, y, z)$ . Se tale punto non appartiene ad alcun blocco del sito, annulla questa operazione. Se il sito non è uno dei due presenti nel territorio, annulla questa operazione.
- **area**(*sito*)  
 Calcola l'area minima di una regione rettangolare contenente le basi di tutti i blocchi presenti nel sito *sito*. Se il sito non è uno dei due presenti nel territorio, annulla questa operazione.
- **stele**(*sito, x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>, x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>*)  
 Calcola un cammino di lunghezza minima per la stele la cui posizione iniziale è  $(x_0, y_0, 0)$  e la cui posizione finale è  $(x_1, y_1, 0)$ . Il percorso cerimoniale è costituito da tutto il sito cerimoniale, coi blocchi nelle loro posizioni attuali come ostacoli. Stampa il cammino trovato e la sua lunghezza, oppure un opportuno messaggio se tale cammino non esiste. Se il sito non è uno dei due presenti nel territorio, annulla questa operazione.
- **stele\_e\_percorso**(*sito, nomefile*)  
 Legge dal file *nomefile* la posizione iniziale e quella finale della stele, e il percorso cerimoniale entro il quale deve compiersi il cammino. Calcola quindi un cammino di lunghezza minima con questi dati. I blocchi del sito la cui collocazione si sovrappone anche parzialmente al percorso cerimoniale vanno considerati ostacoli. Stampa il cammino trovato e la sua lunghezza, oppure un opportuno messaggio se tale cammino non esiste. Se il sito non è uno dei due presenti nel territorio, annulla questa operazione. Se il file *nomefile* non esiste, stampa un messaggio opportuno. È compito dello studente specificare completamente il formato del file.

### 3 Modalità di consegna

La presente traccia è valida per l'appello dell'11 settembre 2013.

La relazione (non meno di 3, non più di 10 pagine in formato pdf o rtf) va inviata per posta elettronica all'indirizzo [aguzzoli@dsi.unimi.it](mailto:aguzzoli@dsi.unimi.it) entro il 18 settembre 2013.

La relazione e gli altri file aggiuntivi (file sorgenti C, esempi di input, ecc) devono essere contenuti in un unico archivio **.zip** il cui nome dovrà essere della forma **cognome.matricola.zip**. Tutti i file nell'archivio, compresa la relazione, devono riportare nome, cognome e matricola dell'autore.

In generale non è prevista una discussione orale dei progetti, ma in casi particolari potranno essere richiesti dei chiarimenti via mail o dal vivo all'autore delle relazioni.

La realizzazione del progetto è una prova d'esame da svolgersi **individualmente**. I progetti giudicati frutto di **copiatura** saranno **estromessi** d'ufficio dalla valutazione.

La versione aggiornata del progetto è pubblicata in **.pdf** sul sito:

<http://homes.di.unimi.it/~aguzzoli/algo.html>.

Si consiglia di consultare periodicamente questo sito per eventuali correzioni e/o precisazioni relative al testo del progetto.