Laboratorio di Algoritmi e Strutture Dati

Docenti: M. Goldwurm, S. Aguzzoli

Appello del 6 Aprile 2002

Progetto "Stalattiti e Stalagmiti"
Consegna entro il 25 Aprile 2002

Il problema

Le stalattiti sono concrezioni calcaree che scendono dalla volta delle grotte. Le stalagmiti hanno composizione analoga ma salgono dal pavimento della grotta verso l'alto. Spesso una stalattite e una stalagmite si incontrano formando una colonna che unisce il pavimento al soffitto della grotta.

In questo progetto si considera una grotta bidimensionale in cui le stalattiti sono costituite da unioni di rettangoli aventi un lato giacente sul soffitto della grotta stessa. Allo stesso modo le stalagmiti sono costituite da unioni di rettangoli aventi un lato giacente sul pavimento della grotta.

L'*universo* $U(n, m)$ (o *grotta*) è rappresentato da un piano rettangolare di dimensione fissata $n \times m$ ($n, m > 0$ interi):

$$U(n, m) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\ ,\ 0 \leq x \leq n\ ,\ 0 \leq y \leq m\}.$$

Il *pavimento* $P(n, m)$ della grotta è costituito dal lato inferiore del piano:

$$P(n, m) = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{Z},\ 0 \leq x \leq n\}.$$

Analogamente il *soffitto* $S(n, m)$ della grotta è costituito dal lato superiore del piano:

$$S(n, m) = \{(x, m) \mid x \in \mathbb{Z},\ 0 \leq x \leq n\}.$$

Inizialmente la grotta non contiene né stalattiti né stalagmiti. Ad ogni momento lo *stato* G della grotta sarà dato dall'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ appartenenti a qualche stalattite o a qualche stalagmite. L'utente può specificare la crescita di stalattiti e stalagmiti inserendo elementi base di forma rettangolare sul pavimento o sul soffitto della grotta (si noti che gli elementi base possono anche sovrapporsi).

Un elemento base per stalagmiti è specificato da tre numeri interi a, b, h, dove $0 \leq a < b \leq n$ sono gli estremi del lato del rettangolo giacente sul pavimento, mentre $0 < h \leq m$ è l'altezza del rettangolo stesso. Formalmente:

$$Stag(a, b, h) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq h\}.$$

Chiamiamo $STAG$ l'unione di tutti gli elementi base per stalagmiti presenti nell'universo. Allo stesso modo un elemento base per stalattiti è determinato da tre numeri interi a, b, h, dove $0 \leq a < b \leq n$ sono gli estremi del lato del rettangolo giacente sul soffitto, mentre $0 < h \leq m$ è l'altezza del rettangolo stesso. Formalmente:

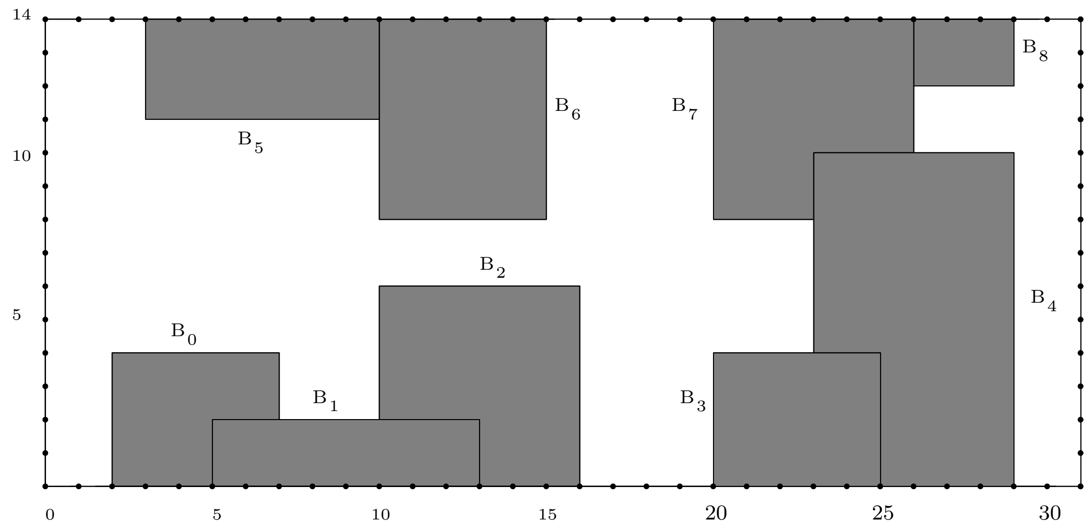
$$Stat(a, b, h) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid a \leq x \leq b,\ m - h \leq y \leq m\}.$$

Denotiamo con $STAT$ l'unione di tutti gli elementi base per stalattiti presenti nell'universo. Ad ogni istante, lo stato G della grotta è dato da $STAG \cup STAT$.

Si noti che un elemento base di altezza $h = m$ (e di base $[a, b]$) può essere specificato sia come elemento per stalattiti $Stat(a, b, h)$, sia come elemento per stalagmiti $Stag(a, b, h)$. Un elemento base di altezza $h = m$ è quindi contenuto sia in $STAT$ sia in $STAG$.

Nell'esempio in figura viene rappresentato l'universo $U(31, 14)$ in cui sono inseriti gli elementi base $B_0, \dots, B_8$ così definiti:

$$B_0 = Stag(2, 7, 4) \quad B_1 = Stag(5, 13, 2) \quad B_2 = Stag(10, 16, 6) \quad B_3 = Stag(20, 25, 4) \quad B_4 = Stag(23, 29, 10)$$
$$B_5 = Stat(3, 10, 3) \quad B_6 = Stat(10, 15, 6) \quad B_7 = Stat(20, 26, 6) \quad B_8 = Stat(26, 29, 2)$$



Due elementi base $B, B' \subseteq G$ sono *adiacenti* se $B \cap B' \neq \emptyset$; B e B' sono *connessi* se esistono degli elementi base $B_0, B_1, \dots, B_k \subseteq G$ (con $k \geq 0$) tali che $B_0 = B$, $B_k = B'$ e, per ogni $i \in \{0, \dots, k-1\}$, B_i è adiacente a B_{i+1}. Si noti in particolare che ogni elemento base è adiacente a se stesso e due elementi adiacenti sono anche connessi. Ad esempio, B_0 e B_1 sono adiacenti B_5 e B_6 sono adiacenti, B_0 e B_2 sono connessi (ma non adiacenti), B_3 e B_8 sono connessi (ma non adiacenti). Una *stalagmite* $\mathcal{S}$ è l'unione di un insieme massimale di elementi base di $STAG$ fra loro connessi, ossia:

- $\mathcal{S} \subseteq STAG$.
- Per ogni coppia di elementi base $B, B' \subseteq \mathcal{S}$, B è connesso con B'.
- Se B è un elemento base contenuto in $\mathcal{S}$ e B' è un elemento base per stalagmiti tale che $B' \cap \mathcal{S} = \emptyset$, allora B non è connesso con B'.

Nella figura sono presenti due stalagmiti:

$$\mathcal{S}_1 = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \quad \mathcal{S}_2 = B_3 \cup B_4$$

Analogamente, una *stalattite* è l'unione di un insieme massimale di elementi base di $STAT$ fra loro connessi. Nella figura ci sono due stalattiti:

$$\mathcal{T}_1 = B_5 \cup B_6 \quad \mathcal{T}_2 = B_7 \cup B_8$$

Quando un elemento base per stalattiti è adiacente a un elemento base per stalagmiti si forma una *colonna*, che è definita dall'unione della stalagmite e della stalattite a cui appartengono i suddetti elementi base. Chiamiamo *castello* l'unione di un insieme massimale di elementi base in G fra loro connessi; si osservi che quando un castello non coincide con una stalattite o una stalagmite allora esso contiene almeno una colonna come sottoinsieme. Nella figura ci sono tre castelli:

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{S}_1 \quad \mathcal{C}_2 = \mathcal{T}_1 \quad \mathcal{C}_3 = \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{T}_2$$

Poiché un castello descrive un poligono nel piano, è possibile descriverlo elencando le coordinate dei vertici del poligono. Più precisamente:

- Se il castello contiene almeno una stalagmite, è descritto partendo dal vertice sul pavimento più a sinistra ed elencando i vertici del poligono che si incontrano percorrendo il suo contorno in senso orario.

- Se il castello è formato solo da stalattiti, è descritto partendo dal vertice sul soffitto più a sinistra ed elencando i vertici del poligono che si incontrano percorrendo il suo contorno in senso orario.

Ad esempio, i castelli nella figura sono descritti come segue:

$\mathcal{C}_1$: $(2,0)$, $(2,4)$, $(7,4)$, $(7,2)$, $(10,2)$, $(10,6)$, $(16,6)$, $(16,0)$

$\mathcal{C}_2$: $(3,14)$, $(15,14)$, $(15,8)$, $(10,8)$, $(10,11)$, $(3,11)$

$\mathcal{C}_3$: $(20,0)$, $(20,4)$, $(23,4)$, $(23,8)$, $(20,8)$, $(20,14)$, $(29,14)$, $(29,12)$, $(26,12)$, $(26,10)$, $(29,10)$, $(29,0)$

Il *perimetro* e l'*area* di un castello sono rispettivamente il perimetro (basi incluse) e l'area del poligono descritto dal castello.

È anche possibile distruggere pezzi di un castello. Più precisamente, dati due interi $a, b \geq 0$, l'operazione di distruzione consiste nell'eliminare i punti della grotta della forma (x, y) con $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq m$; al termine dell'operazione, l'insieme dei punti G' della grotta è dato da:

$$G' = G \setminus \{(x, y) \in G \mid a \leq x \leq b,\, 0 \leq y \leq m\}$$

dove $\setminus$ denota la differenza fra insiemi. Si noti che in seguito all'operazione di distruzione un elemento base può scomparire, oppure diminuire in larghezza, oppure dare origine a due nuovi elementi base non adiacenti.

Si richiede di implementare una struttura dati efficiente che permetta di eseguire le operazioni descritte sotto.

- **crea (n,m)**

  Crea una grotta vuota di dimensione $n \times m$ (se una grotta è già definita essa viene eliminata).

- **inseriscistag (a, b, h)**

  Inserisce nel piano l'elemento base $Stag(a, b, h)$.

- **inseriscistat (a, b, h)**

  Inserisce nel piano l'elemento base $Stat(a, b, h)$.

- **cast(x,y)**

  Restituisce -1 se il punto $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ non appartiene ad alcun castello, altrimenti restituisce la descrizione del castello a cui (x, y) appartiene, secondo il formato specificato in seguito.

- **perim(x,y)**

  Restituisce -1 se il punto $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ non appartiene ad alcun castello, altrimenti restituisce la misura del perimetro del castello a cui (x, y) appartiene.

- **area(x,y)**

  Restituisce -1 se il punto $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ non appartiene ad alcun castello, altrimenti restituisce la misura dell'area del castello a cui (x, y) appartiene.

- **demolisci (a, b)**

  Cancella dalla grotta tutti i punti $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tali che $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq m$.

Si tenga presente che la dimensione dell'universo può essere *grande* rispetto alla dimensione complessiva dei castelli presenti nell'universo, quindi *non è sicuramente efficiente rappresentare il piano mediante una bit-map di tipo* $n \times m$ (o strutture analoghe); si devono inoltre evitare procedure che effettuano ricerche su *tutto* il piano.

Specifiche di implementazione

Il programma deve leggere dallo standard input (`stdin`) una sequenza di linee (separate da `\n`), ciascuna delle quali corrisponde a una linea della prima colonna della Tabella 1, dove x,y e z sono numeri naturali e i vari elementi sulla linea sono separati da uno o più spazi. Quando una linea è letta, viene eseguita l'operazione associata; le operazioni di stampa sono effettuate sullo standard output (`stdout`), e ogni operazione deve iniziare su una nuova linea. L'output deve essere prodotto nel formato sotto specificato *subito dopo* l'esecuzione del comando (non al termine del programma).

LINEA DI INPUT	OPERAZIONE
`c` x y	**crea (x y)**
`g` x y z	**inseriscistag (x, y, z)**
`t` x y z	**inseriscistat (x, y, z)**
`s` x y	Stampa l'output di **cast (x, y)** secondo il formato sotto specificato.
`p` x y	Stampa l'output di **perim (x, y)** secondo il formato sotto specificato.
`a` x y	Stampa l'output di **area (x, y)** secondo il formato sotto specificato.
`d` x y	Esegue la funzione **demolisci (x, y)**
`f`	Stampa il carattere `f` e termina l'esecuzione del programma

Tabella 1: Specifiche del programma

Si noti che non devono essere presenti vincoli sulla dimensione del piano (se non quelli determinati dal tipo di dato intero). Non si richiede – anzi si sconsiglia – l'uso di grafica, se non per test personali: in modo particolare, non si usi `conio.h` e neppure `clrscr()`.

Formato per la stampa dell'output di cast(x, y)

Se **cast(x, y)** restituisce -1, la linea di output da stampare è la seguente:

```
c -1
```

Altrimenti, siano $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ le coordinate che descrivono il castello a cui appartiene il punto (x, y), secondo l'ordine specificato sopra. Le linee di output da stampare sono le seguenti:

```
c (
x1 y1
x2 y2
 ..
xk yk
)
```

Formato per la stampa dell'output di perim(x, y)

Sia n il valore calcolato da **perim(x, y)** $(n \geq -1)$; la linea di output da stampare è la seguente:

```
p n
```

Formato per la stampa dell'output di area(x, y)

Sia n il valore calcolato da **area(x, y)** $(n \geq -1)$; la linea di output da stampare è la seguente:

```
a n
```

Esempio

Si supponga che le linee di input siano:

```
c 31 14
g 2 7 4
g 5 13 2
g 10 16 6
s 4 1
p 15 3
a 2 0
t 8 11 12
t 20 26 6
s 10 10
d 9 10
s 10 10
f
```

L'output prodotto dal programma deve essere:

```
c (
2 0
2 4
7 4
7 2
10 2
10 6
16 6
16 0
)
p 44
a 62
c (
2 0
2 4
7 4
7 2
8 2
8 14
11 14
11 6
16 6
16 0
)
c (
10 0
10 14
11 14
11 6
16 6
16 0
)
f
```

Presentazione del progetto

Il progetto deve essere inviato per posta elettronica all'indirizzo `aguzzoli@dsi.unimi.it` entro il 25 Aprile 2002. La discussione del progetto e l'esame orale si svolgeranno lunedì 29 Aprile alle ore 14 in aula 5 (via Comelico 39).

Occorre presentare:

1. il codice sorgente (rigorosamente ANSI C, compilabile con **gcc**);
2. una sintetica relazione (formato pdf o rtf) che illustra le strutture dati utilizzate e analizza il costo delle diverse operazioni.

I due file devono essere contenuti in un unico file `.zip` il cui nome dovrà essere `cognome.zip`. La relazione e il codice devono riportare il vostro nome, cognome e matricola.

Una copia cartacea della relazione e del codice deve inoltre essere consegnata al dr. Aguzzoli sempre entro il 25 Aprile 2002 (lasciandola eventualmente nella sua casella postale presso il dipartimento in via Comelico).

Si ricorda infine di presentarsi alla prova orale con una copia stampata della relazione e del codice.

Per ogni ulteriore chiarimento:
E-mail: `aguzzoli@dsi.unimi.it`
Ricevimento: il mercoledì, ore 15-16, stanza S211.

Avviso

La versione aggiornata del progetto è pubblicata in .pdf sul sito:
`http://homes.dsi.unimi.it/~aguzzoli/stefanodidattica.htm`.
Si consiglia di consultare periodicamente questo sito per eventuali correzioni, chiarimenti e/o altre informazioni relative al testo del progetto.